

# Dos caras de una misma moneda: la elasticidad y las derivadas

Mónica Maldonado  
mmaldonado@edem.es

Víctor Sotomayor  
vsotomayor@edem.es

Centro Universitario EDEM (Escuela de Empresarios), Valencia, España

## RESUMEN

La asignatura de Introducción a la Economía del Grado en ADE para Emprendedores del Centro Universitario EDEM (Valencia) pretende dar a conocer al estudiante los principios esenciales del análisis económico, proporcionándole una primera toma de contacto con el funcionamiento básico de los mercados, tanto a nivel microeconómico como macroeconómico. Por otro lado, la asignatura Matemáticas I proporciona los conceptos, técnicas e instrumentos matemáticos básicos que serán necesarios en el resto del Grado. Ambas asignaturas están estrechamente ligadas, aunque a priori el alumnado parece no detectar dicha interrelación. Aprovechando el hecho de que ambas asignaturas se imparten en el primer cuatrimestre del primer curso académico, hemos tratado de mitigar dicho problema. En el presente trabajo describimos una experiencia de enseñanza cooperativa (*Team Teaching*), con el objetivo de mostrar la estrecha relación existente entre las derivadas y la elasticidad. Se hizo un especial énfasis en cómo la abstracción implícita en los conceptos matemáticos es precisamente lo que permite posteriormente aplicarlos en diversos contextos económicos. También hemos hecho uso del software *Geogebra* con el fin de motivar dichos conceptos de una manera visual e interactiva. Estas actividades han sido evaluadas de manera positiva por los estudiantes a través de encuestas realizadas de manera anónima. En global, podemos concluir que la experiencia ha sido altamente satisfactoria.

**Palabras clave:** team teaching, elasticidad, derivadas, incrementos.

## 1. Introducción

Generalmente a los estudiantes de un Grado de ADE les cuesta mucho entender que los conceptos que se les explican en las asignaturas de matemáticas son necesarios para comprender los conceptos puramente económicos. Tienen tendencia a archivar lo visto en cada asignatura en compartimentos separados y no son capaces (en general) de relacionar las diferentes materias.

Para un estudiante de economía es fundamental aprender que las matemáticas son una herramienta básica, son el lenguaje con el que nos comunicamos generalmente los economistas. Como ocurre con cualquier lenguaje, es necesario comprender lo que se dice para que este sea eficaz.

Los estudiantes de primer curso del Grado en ADE para Emprendedores del Centro Universitario EDEM cursan en el primer semestre tanto la asignatura de Introducción a la Economía como la de Matemáticas I. En las primeras sesiones del curso fueron surgiendo entre los estudiantes las primeras dificultades en el aprendizaje de los conceptos económicos que implicaban conceptos matemáticos. Ante esta situación, los profesores de ambas asignaturas comenzamos a colaborar de manera informal tratando de ajustar el *timing* de las sesiones, unificando la notación empleada por ambos o consensuando los ejemplos que se iban a utilizar para ilustrar los diferentes conceptos.

Con el objetivo general de mostrar a los estudiantes que las asignaturas de Introducción a la Economía y Matemáticas I están estrechamente relacionadas, tras las primeras sesiones pensamos en iniciar una nueva aproximación pedagógica: el *team teaching* y colaborar de manera regular en el diseño de los objetivos de aprendizaje, en la preparación de sesiones tanto individuales como conjuntas y en la evaluación de los resultados (Buckley, 1999).

Así, tras las primeras colaboraciones informales pasamos a diseñar una experiencia colaborativa concreta, utilizando para ello el concepto de derivada y su relación con el concepto económico de elasticidad. Con el objetivo de complementar la experiencia y conseguir que los estudiantes comprendieran mejor los conceptos a analizar introdujimos el software *Geogebra*. Se trata de un software libre que ofrece geometría, álgebra y cálculo y que es ampliamente utilizado por estudiantes y profesores por su facilidad de uso, incluso en educación secundaria. La literatura sugiere que el

uso de la tecnología en la enseñanza de los conceptos matemáticos presenta multitud de beneficios (Dravekova y Svecova, 2015; Majerek, 2014). En particular, el uso de las diferentes herramientas de **GeoGebra** puede ayudar a los estudiantes a tener una visión gráfica de conceptos abstractos (Hohenwater *et al.*, 2008).

## 2. Qué es el *Team Teaching*

Se pueden encontrar en la literatura diferentes definiciones de lo que supone el *team teaching* como metodología de enseñanza-aprendizaje. El *team teaching* ha sido descrito como enseñanza cooperativa o colaborativa en la que dos o más profesores se involucran conjuntamente en el proceso de planificación, enseñanza y evaluación (Boulay, 2005; Buckley, 1999; Bauwens y Hourcade, 1995, 1991; Bauwens *et. al.*, 1989).

La evidencia en la literatura sugiere que la enseñanza en equipo puede mejorar la participación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje y alejarlos de la concepción clásica de la acumulación de conocimientos (Donnison *et al.*, 2009; Shibley, 2006). Además, como parte del proceso, los profesores involucrados en el mismo aprenden unos de otros y como consecuencia tienden a ser más creativos a la hora de generar nuevo conocimiento (Kerin y Murphy, 2015; Murphy y Scantlebury, 2010; Roth y Tobin, 2002). El *team teaching* requiere de los profesores una serie de habilidades y características como el respeto, la empatía o la asertividad, fundamentales para el funcionamiento correcto y cohesionado del grupo (Mansell, 2006). La literatura, en definitiva, avala el *team teaching* como estrategia pedagógica para promover el aprendizaje en la educación superior (Anderson y Speck, 1998).

## 3. Objetivos

Como se ha comentado ya en la sección anterior, este año hemos elegido las asignaturas de Introducción a la Economía y Matemáticas I, ya que ambas asignaturas se imparten de manera paralela en el primer cuatrimestre del primer curso académico. Esta característica resulta fundamental, ya que de otra forma se dota al alumnado de unas técnicas matemáticas que suelen olvidar de un cuatrimestre a otro (o incluso de un curso a otro).

El principal concepto matemático en el que nos centramos fue el de la derivada. *Grosso modo*, la derivada de una función en un punto mide la proporción existente entre el cambio que sufre el valor de una función matemática cuando se modifica ligeramente el valor de una variable independiente en dicho punto. La definición formal matemática resulta, en general, bastante abstracta para el alumnado. Es por ello que también pretendíamos usar la tecnología existente para intentar realizar gráficas interactivas en 2D con algunas funciones, de manera que pudieran ver cómo se calcula la derivada en un punto gráficamente.

Por otro lado, la elasticidad fue el concepto estrella económico durante las sesiones conjuntas. La elasticidad mide también la proporción entre los cambios de los valores de una función y una variable independiente, pero de manera relativa. De esta forma, podemos cuantificar claramente si un determinado incremento es significativo o no. La elasticidad también se puede calcular de forma interactiva con **Geogebra**, pudiendo por tanto proporcionar de una manera sencilla ejemplos de funciones (de demanda, de producción, etc.) con derivada constante en un punto pero elasticidad variable y viceversa.

Los archivos creados con **Geogebra** fueron proporcionados a los estudiantes por el aula virtual, con el fin de que ellos también pudiesen experimentar con el programa y los contenidos. De esta manera, el alumnado participa activamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje, dejando atrás el clásico modelo de enseñanza de la clase magistral.

A continuación, resumimos los objetivos concretos del equipo docente:

1. Mostrar al alumnado la estrecha relación existente entre los conceptos matemáticos y económicos.
2. Mejorar la comprensión de los conceptos de derivada y elasticidad mediante gráficas interactivas.
3. Aumentar la participación e implicación de los estudiantes en la materia.

## 4. Descripción de la experiencia

Durante las primeras semanas del curso académico, en ambas asignaturas se fueron introduciendo de manera progresiva diferentes conceptos económicos y matemáticos que iban a ser necesarios posteriormente como funciones, incrementos, límites, incrementos porcentuales, derivadas, elasticidad, etc.

Durante esta primera fase se fueron utilizando algunas de las técnicas del *team teaching*. Por ejemplo, se fueron introduciendo los conceptos en ambas asignaturas de manera coherente y paralela, esto es, primero los incrementos, luego los incrementos porcentuales, posteriormente las derivadas y finalmente la elasticidad. Otro detalle importante, aunque pueda no parecerlo, fue la unificación de la terminología y la notación utilizada. Esto se debe a que, en ocasiones, los estudiantes encuentran algunas dificultades en identificar como iguales dos notaciones distintas. Por ejemplo, en matemáticas es frecuente representar en una gráfica 2D la variable independiente en el eje OX, mientras que en economía se suele hacer en el eje OY. Otro punto donde se hizo especial énfasis fue en la equivalencia de notación en las funciones; por ejemplo, una función de demanda en matemáticas se suele expresar  $f(x) = -2x + 50$  o  $y = -2x + 50$ , mientras que en economía  $X_d = -2P_x + 50$ . Estos pequeños matices, aunque puedan parecer insignificantes, resultan realmente fundamentales en el inicio del curso. También se fueron mostrando ejemplos de algunas gráficas de funciones con **Geogebra**, el cual no era conocido para los alumnos. De esta manera se iban familiarizando con el entorno del programa.

Una vez quedaron explicados los conceptos anteriormente mencionados, programamos una sesión conjunta de matemáticas y economía (MatEco), donde participamos ambos profesores. En dicha sesión se hizo especial énfasis en la relación entre ambos conceptos, en sus diferencias y similitudes, mostrando numerosos ejemplos. Se insistió también en la interpretación de ambos conceptos, dejando claro que la elasticidad mide valores porcentuales, lo cual nos ayuda a determinar si un cambio es significativo o no.

### Ejemplos entre dos puntos

$$X_d = -2P_x + 50$$

Puntos	Pendiente		Elasticidad	
	Calcular	Interpretar	Calcular	Interpretar
$P_0=8 ; X_0=34$ $P_1=10 ; X_1=30$	$-4/2 = -2$	Por cada unidad (€) que sube el precio las cantidades disminuyen en 2	$\frac{\Delta X}{\Delta P} * \frac{P_0}{x_0}$ $-2*(8/34)=-0,47$	Por cada 1% que sube el precio las cantidades disminuyen en 0,47% respecto al punto inicial.
			$\frac{\Delta X}{\Delta P} * \frac{P_0+P_1}{x_0+x_1}$ $-2*(18/64)=-0,56$	Por cada 1% que sube el precio las cantidades disminuyen en 0,56% respecto a la media entre los dos puntos.
$P_0=15 ; X_0=20$ $P_1=17 ; X_1=16$	$4/-2 = -2$	Por cada unidad (€) que sube el precio las cantidades disminuyen en 2	$-2*(15/20)=-1,5$	Por cada 1% que sube el precio las cantidades disminuyen en 1,5% respecto al punto inicial.

Figura 1: Cálculo e interpretación de pendiente y elasticidad entre dos puntos de una función de demanda.

Una opción muy interesante del software **Geogebra** es el *deslizador*, i.e. una herramienta que permite que una variable se pueda mover en un intervalo dado. Con esta técnica, la cual se puede apreciar en la Figura 2, conseguimos que el alumnado pudiese ver cómo varía la pendiente y la elasticidad en los puntos de un determinado intervalo. También mostramos la diferencia de elasticidad respecto del punto inicial y del punto medio.

Con esta herramienta del deslizador, también pudimos simular un límite y por tanto ver cómo la derivada en un punto nos da la pendiente de la recta tangente en dicho punto. Concretamente, hicimos que una variable  $h$  tendiese a 0 mediante el deslizador, tal y como se puede ver en la Figura 3.

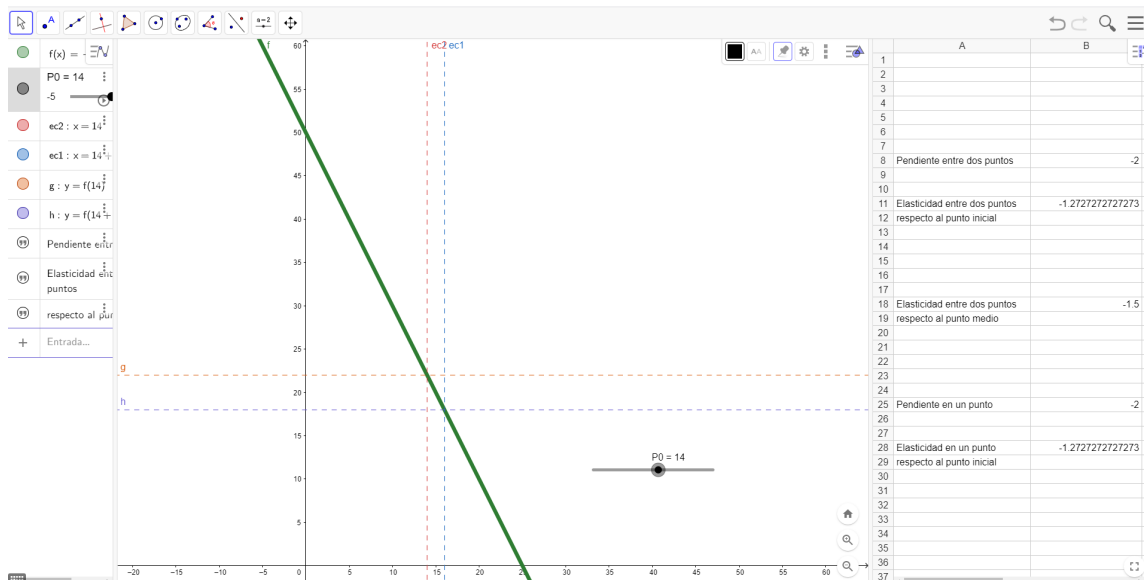


Figura 2: Cálculo de pendiente y elasticidad de una función lineal de demanda de forma interactiva.

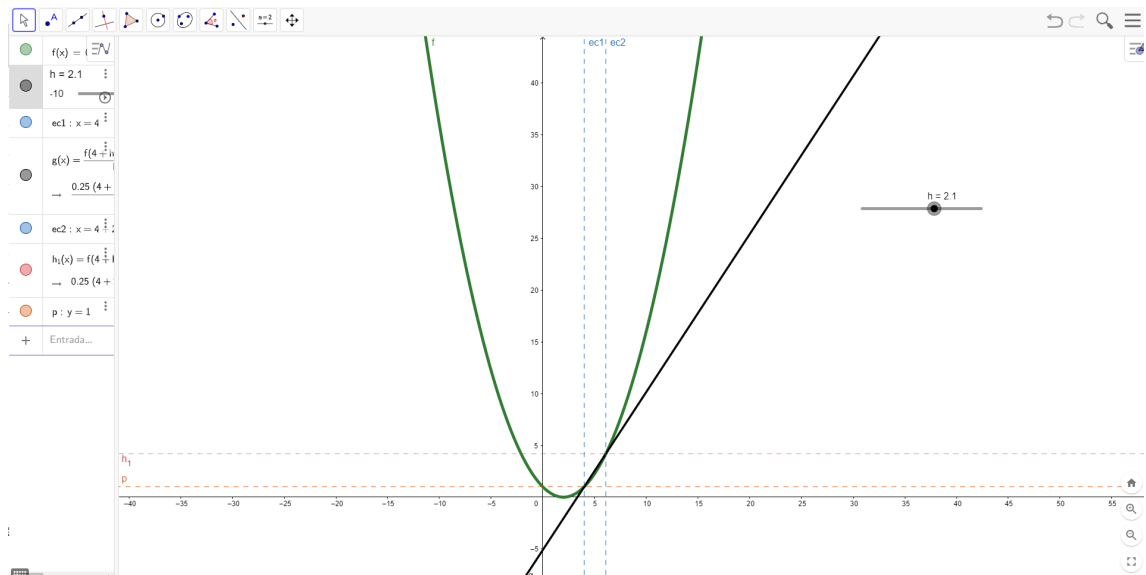


Figura 3: Cálculo de recta tangente y derivada en un punto de forma interactiva.

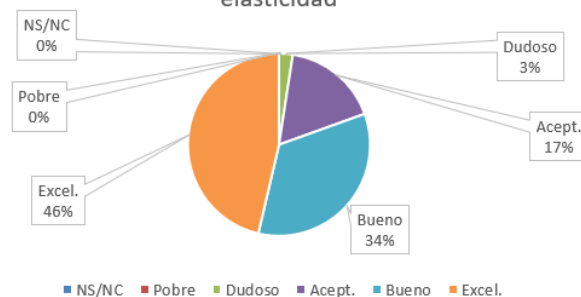
Como hemos visto en las imágenes, otra gran ventaja del software **Geogebra** es que permite insertar en la misma pantalla gráfica una hoja de cálculo. De esta manera, introduciendo por ejemplo la fórmula de la elasticidad en un punto, el programa calcula automáticamente dicho número dependiendo del valor que esté tomando la variable en el deslizador. Esto supone un ahorro considerable de tiempo en clase, lo que permite mostrar una mayor cantidad de ejemplos.

Hemos de señalar que el ambiente en clase y la experiencia han sido muy satisfactorios. El alumnado se ha mostrado en general muy motivado durante estas sesiones conjuntas. Tras finalizar dichas sesiones, rellenaron de manera anónima una encuesta, cuyos resultados permiten al profesorado analizar la experiencia de manera cuantitativa. En la siguiente sección mostramos los resultados de dicho análisis.

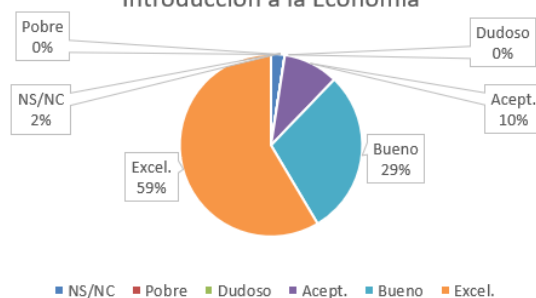
## 5. Resultados

El porcentaje de alumnos que participaron voluntariamente en las encuestas anónimas fue del 77.36%. A continuación destacamos 3 de las preguntas más importantes que se realizaron en dicho cuestionario. Los resultados a estas preguntas los resumimos en forma de diagrama circular.

La sesión me ha ayudado a comprender mejor el concepto de derivada y su relación con la elasticidad



La sesión me ha ayudado a comprender mejor la relación entre las asignaturas de Matemáticas I e Introducción a la Economía



En general, estoy satisfecho con este seminario

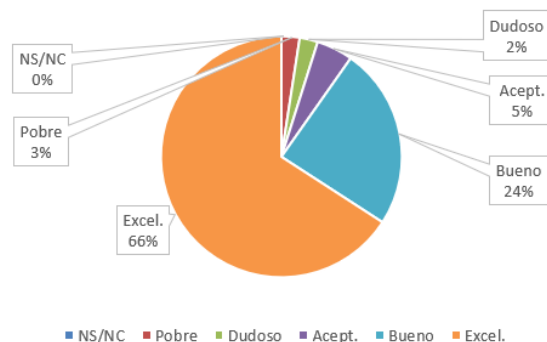


Figura 4: Resultados de las encuestas.

Como podemos observar, los resultados evidencian las hipótesis que el profesorado se planteaba al inicio de estas actividades. Además, las encuestas disponían de un apartado para dejar comentarios o posibles mejoras para otros años. Destacamos a continuación un par de ellos:

-Están ambos profesores centrados en resolver las dudas, aportando a la vez un enfoque matemático y económico.

-La seguiría haciendo con otros cursos para así ir mejorando en que los alumnos entiendan la materia.

## 6. Conclusiones

A la vista de los resultados presentados en la sección anterior, podemos afirmar que los alumnos han comprendido mejor la relación existente entre las derivadas y la elasticidad. Asimismo, los estudiantes manifiestan que después de estas experiencias logran relacionar mejor las asignaturas de Matemáticas I e Introducción a la Economía, lo cual era uno de los principales objetivos que nos marcamos al inicio del curso académico.

También podemos confirmar que el alumnado se siente más motivado y satisfecho después de esta experiencia. Este hecho junto con las sugerencias aportadas por los alumnos nos hace plantearnos la continuidad de esta estrategia docente en el curso siguiente. Es posible también relacionar otros conceptos como, por ejemplo, el excedente del consumidor y el excedente del productor con el concepto de integral. Esta experiencia también puede ser aplicable a otros cursos académicos del grado y a otras asignaturas.

En resumen, las conclusiones que hemos obtenido el profesorado son altamente positivas. Creemos que la aplicación de experiencias colaborativas pueden contribuir a mejorar significativamente el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes.

## Referencias

- [1] Anderson, R. S., y Speck, B. W. (1998). "Oh what a difference a team makes": Why team teaching makes a difference. *Teaching and teacher education*, 14(7), 671-686.
- [2] Bauwens, J., y Hourcade, J. J. (1991). Making co-teaching a mainstreaming strategy. *Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth*, 35(4), 19-24.
- [3] Bauwens, J., y Hourcade, J. J. (1995). *Cooperative teaching: Rebuilding the schoolhouse for all students*. Pro-Ed, 8700 Shoal Creek Blvd., Austin.
- [4] Bauwens, J., Hourcade, J. J., y Friend, M. (1989). Cooperative teaching: A model for general and special education integration. *Remedial and Special Education*, 10(2), 17-22.
- [5] Boulay, M. R. (2005). *Teacher content and pedagogical learning in secondary team teaching settings*. Boston University.
- [6] Buckley, F. J. (1999). *Team teaching: what, why, and how?*. Sage Publications.
- [7] Crawford, R., y Jenkins, L. E. (2018). Making pedagogy tangible: Developing skills and knowledge using a team teaching and blended learning approach. *Australian Journal of Teacher Education*, 43(1), 8.
- [8] Donnison, S., Edwards, D., Itter, D., Martin, D., y Yager, Z. (2009). Reflecting on improving our practice: Using collaboration as an approach to enhance first year transition in higher education. *Australian Journal of Teacher Education*, 34(3), 2.
- [9] Drabekova, J., y Švecova, S. (2015). Solving the Microeconomics Problems by Using the Tools of GeoGebra. *Proceedings ICABR, 2015*, 235.
- [10] Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., y Lavicza, Z. (2008). Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. In *11th International Congress on Mathematical Education*. Monterrey, Nuevo León, Mexico.
- [11] Kerin, M., y Murphy, C. (2015). Exploring the impact of coteaching on pre-service music teachers. *Asia-Pacific Journal of Teacher Education*, 43(4), 309-323.
- [12] Majerek, D. (2014). Application of Geogebra for teaching mathematics. *Advances in science and technology research journal*, 8(24), 51-54.
- [13] Mansell, J. (2006). Team teaching in Further Education, *Educational Research*, 17(1), 19-26.
- [14] Murphy, C., y Scantlebury, K. (2010). Introduction to coteaching. In *Coteaching in International Contexts* (pp. 1-7). Springer, Dordrecht.
- [15] Roth, W. M., y Tobin, K. G. (2002). *At the elbow of another: Learning to teach by coteaching* (Vol. 204). Peter Lang Pub Incorporated.
- [16] Shibley, I. A. (2006). Interdisciplinary team teaching: Negotiating pedagogical differences. *College teaching*, 54(3), 271-274.
- [17] Wenger, M. S., y Hornyak, M. J. (1999). Team teaching for higher level learning: A framework of professional collaboration. *Journal of Management Education*, 23(3), 311-327.